Convergenza uniforme. Interpretazione geometrica della differenziabilità

Convergenza uniforme di famiglie di funzioni

Definizione 1. *Sia Ω un insieme in $\mathbb{R}^d$ e $G : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione limitata. Definiamo*

$$\|G\|_{L^\infty(\Omega)} := \sup_{x\in\Omega} |G(x)|.$$

Definizione 2 (Convergenza uniforme e convergenza puntuale)**.** *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme dato e $F_r : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una famiglia di funzioni limitate che dipende dal parametro $r > 0$. Sia $G : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione limitata su Ω.*

- *Diciamo che F_r* **converge uniformemente** *alla funzione $G : \Omega \to \mathbb{R}^m$ se*

$$\lim_{r\to 0} \|F_r - G\|_{L^\infty(\Omega)} = 0.$$

- *Diciamo che F_r* **converge puntualmente** *alla funzione $G : \Omega \to \mathbb{R}^m$ se*

$$\lim_{r\to 0} F_r(X) = G(X) \qquad \text{per ogni} \qquad X \in \Omega.$$

Osservazione 3 (Convergenza uniforme $\Rightarrow$ convergenza puntuale)**.** *Se F_r converge uniformemente a G su Ω, allora F_r converge puntualmente a G. Infatti, per ogni $X \in \Omega$, abbiamo*

$$\lim_{r\to 0} |F_r(X) - G(X)| \le \lim_{r\to 0} \Big\{ \sup_{Y\in\Omega} |F_r(Y) - G(Y)| \Big\} = \lim_{r\to 0} \|F_r - G\|_{L^\infty(\Omega)} = 0.$$

Esempio 4. *La sola convergenza puntuale di una famiglia di funzioni $F_r : \Omega \to \mathbb{R}$ non implica la sua convergenza uniforme. Infatti, se prendiamo come insieme Ω l'intervallo $[0, 1]$, e come F_r le funzioni*

$$F_r(x) := \begin{cases} \frac{x}{r} & \text{se} \quad x \in [0, r], \\ \frac{2r-x}{r} & \text{se} \quad x \in [r, 2r], \\ 0 & \text{se} \quad x \in [2r, 1], \end{cases}$$

allora, per ogni $x \in [0, 1]$, abbiamo che

$$\lim_{r\to 0} F_r(x) = 0,$$

ovvero la famiglia F_r converge puntualmente alla funzione costante

$$G(x) \equiv 0 \quad \text{per ogni} \quad x \in [0, 1].$$

D'altra parte F_r non converge uniformemente a G. Infatti, per ogni $r > 0$ si ha

$$\|F_r - G\|_{L^\infty([0,1])} = \sup_{x\in[0,1]} |F_r(x)| = |F_r(r)| = 1.$$

Esempio 5. *La famiglia di funzioni*

$$F_r : [-1, 1] \to \mathbb{R} , \qquad F_r(x) = r + x^2 ,$$

converge uniformemente alla funzione $G(x) = x^2$ sull'intervallo $[-1, 1]$.

Esempio 6. *La famiglia di funzioni*

$$F_r : [-1, 1] \to \mathbb{R} , \qquad F_r(x) = (x - r)^2 ,$$

converge uniformemente alla funzione $G(x) = x^2$ sull'intervallo $[-1, 1]$.

Esercizi sulla convergenza uniforme

Esercizio 7. *Studiare il comportamento e (se esiste) trovare il limite uniforme , per $r \to 0$, delle seguenti famiglie di funzioni:*

(1) $F_r : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $F_r(x) = \sqrt{1 + r^2x^2}$;

(2) $F_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_r(x) = \dfrac{x}{1 + r^2x^2}$;

(3) $F_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_r(x) = \dfrac{rx}{1 + r^2x^2}$;

(4) $F_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_r(x) = \dfrac{r^2x}{1 + r^2x^2}$;

(5) $F_r : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $F_r(x) = \dfrac{x}{1 + r^2x^2}$;

(6) $F_r : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $F_r(x) = \dfrac{rx}{1 + r^2x^2}$;

(7) $F_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_r(x) = \exp(-rx^2)$;

(8) $F_r : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $F_r(x) = \exp(-rx^2)$;

(9) $F_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_r(x) = \exp\Big(-\dfrac{x^2}{r}\Big)$;

(10) $F_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_r(x) = \sqrt{r^2 + x^2}$;

(11) $F_r : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $F_r(x) = e^{rx}$;

(12) $F_r : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $F_r(x) = \sin(rx)$;

(13) $F_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_r(x) = \sin(rx)$;

(14) $F_r : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $F_r(x) = \dfrac{1}{r}\sin(rx)$;

(15) $F_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_r(x) = \dfrac{1}{r}\sin(rx)$;

(16) $F_r : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $F_r(x) = \dfrac{1}{r}\big(e^{rx} - 1\big)$;

(17) $F_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_r(x) = \dfrac{1}{r}\big(e^{rx} - 1\big)$;

(18) $F_r : [0,1] \to \mathbb{R}$, $F_r(x) = \arctan\Big(x + \dfrac{1}{r}\Big)$;

(19) $F_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_r(x) = \arctan\Big(x + \dfrac{1}{r}\Big)$.

Soluzione di (5). Calcoliamo intanto il limite puntuale di F_r per $r \to 0$. Per ogni $x \in [-1,1]$, abbiamo:

$$\lim_{r\to 0} F_r(x) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{1 + r^2x^2} = 1.$$

Quindi la funzione costante $G(x) \equiv 1$ è il limite puntuale di F_r ed il candidato per limite uniforme. Per vedere se F_r converge uniformemente a G, fissiamo $r > 0$ e calcoliamo

$$\sup_{x\in[-1,1]} |F_r(x) - G(x)| = \sup_{x\in[-1,1]} \left| \frac{1}{1 + r^2x^2} - 1 \right| = \sup_{x\in[-1,1]} \left| \frac{r^2x^2}{1 + r^2x^2} \right|.$$

Osserviamo che per ogni $x \in [-1, 1]$ si ha

$$\left|\frac{r^2 x^2}{1 + r^2 x^2}\right| \le \frac{r^2}{1 + r^2 x^2} \le r^2.$$

Di conseguenza, anche

$$\sup_{x\in[-1,1]} |F_r(x) - G(x)| = \sup_{x\in[-1,1]} \left|\frac{r^2 x^2}{1 + r^2 x^2}\right| \le r^2.$$

Passando al limite per $r \to 0$, otteniamo che

$$\lim_{r\to 0} \left\{ \sup_{x\in[-1,1]} |F_r(x) - G(x)| \right\} = 0,$$

e quindi concludiamo che F_r converge uniformemente a G (sull'intervallo $[-1, 1]$) per $r \to 0$. $\square$

Una definizione equivalente della convergenza uniforme

Teorema 8. *Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un insieme dato, $G : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una funzione limitata e $F_r : \Omega \to \mathbb{R}^m$ una famiglia di funzioni limitate che dipende dal parametro $r > 0$. Allora, sono equivalenti:*

(i) *F_r converge uniformemente a G per $r \to 0$;*

(ii) *per ogni successione $r_n \to 0$ e per ogni successione (non necessariamente convergente) $Y_n \in \Omega$, abbiamo che*

$$\lim_{n\to\infty} \big|F_{r_n}(Y_n) - G(Y_n)\big| \to 0.$$

Continuità e la convergenza uniforme dei riscalamenti 0-omogenei

Osservazione 9. *Sia $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una dunzione data e $X_0 \in \mathbb{R}^d$. Ricordiamo che sono equivalenti*

(i) $\lim_{X\to 0} F(X) = F(X_0)$*;*

(ii) *per ogni successione $X_n \to X_0$ si ha* $\lim_{n\to\infty} \big|F(X_n) - F(X_0)\big| \to 0$.

Proposizione 10. *Sia $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione. Per ogni $X_0 \in \mathbb{R}^d$ consideriamo la famiglia di funzioni*

$$F_r(X) := F(X_0 + rX)\,.$$

Dimostrare che sono equivalenti:

(i) *La funzione F è continua in X_0.*

(ii) *Per $r \to 0$, la famiglia $F_r : B_1 \to \mathbb{R}$ converge uniformemente su B_1 alla funzione costante*

$$F_0(X) = F(X_0) \quad \textit{per ogni} \quad X \in \mathbb{R}^d.$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima che (i) $\Rightarrow$ (ii). Siano $r_n \to 0$ e $Y_n \in B_1$ una successione di punti. Allora, siccome $r_n Y_n \to 0$, abbiamo

$$|F_{r_n}(Y_n) - F(X_0)| = |F(X_0 + r_n Y_n) - F(X_0)| \to 0,$$

il che implica (ii).
Dimostriamo ora che (ii) $\Rightarrow$ (i). Sia X_n una successione che tende a X_0. Allora, abbiamo

$$|F(X_n) - F(X_0)| = \left|F\Big(X_0 + r_n \frac{X_n - X_0}{r_n}\Big) - F(X_0)\right|$$

Scegliendo $r_n = 2|X_n - X_0|$, abbiamo che

$$r_n \to 0 \qquad \text{e} \qquad Y_n := \frac{X_n - X_0}{2r_n} \in B_1.$$

Di conseguenza, per l'uniforme continuità di F,

$$|F(X_n) - F(X_0)| = |F_{r_n}(Y_n) - F(X_0)| \to 0. \qquad \square$$

Convergenza dei riscalamenti 1-omogenei

Proposizione 11. *Siano $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ una funzione, $X_0 \in \mathbb{R}^d$ un punto e $v \in \mathbb{R}^d$ un vettore. Consideriamo la famiglia di funzioni*

$$F_r(X) = \frac{1}{r}\Big(F(X_0 + rX) - F(X_0)\Big).$$

Dimostrare che sono equivalenti:

(i) $F(X) = F(X_0) + v \cdot (X - X_0) + o(|X - X_0|)$, *ovvero*

$$\lim_{X \to X_0} \frac{\big|F(X) - \big(F(X_0) + v \cdot (X - X_0)\big)\big|}{|X - X_0|} = 0\,. \tag{1}$$

(ii) *Per $r \to 0$, la famiglia $F_r : B_1 \to \mathbb{R}$ converge uniformemente in B_1 alla funzione lineare*

$$L(X) = v \cdot X \quad \textit{per ogni} \quad X \in \mathbb{R}^d.$$

Dimostrazione. Dimostriamo prima che (i) $\Rightarrow$ (ii). Siano $r_n \to 0$ e $Y_n \in B_1$ una successione (non necessariamente convergente). Allora,

$$\big|F_{r_n}(Y_n) - v \cdot Y_n\big| = \Big|\frac{1}{r_n}\big(F(X_0 + r_nY_n) - F(X_0)\big) - v \cdot Y_n\Big| = |Y_n|\frac{\big|F(X_0 + r_nY_n) - F(X_0) - v \cdot (r_nY_n)\big|}{|r_nY_n|}.$$

Siccome, $r_nY_n \to 0$ possiamo applicare (i) alla successione $X_0 + r_nY_n$. Siccome Y_n è limitata, abbiamo

$$\big|F_{r_n}(Y_n) - v \cdot Y_n\big| \to 0,$$

il che conclude la dimostrazione di (i) $\Rightarrow$ (ii).

Dimostriamo ora che (ii) $\Rightarrow$ (i). Sia $X_n \to X_0$. Definiamo $Y_n = \frac{X_n - X_0}{r_n}$, dove il raggio r_n

$$\begin{aligned}
\frac{\big|F(X_n) - F(X_0) - v \cdot (X_n - X_0)\big|}{|X_n - X_0|} &= \frac{\big|F(X_0 + r_nY_n) - F(X_0) - v \cdot (r_nY_n)\big|}{r_n|Y_n|} \\
&= \frac{\big|F(X_0 + r_nY_n) - F(X_0) - v \cdot (r_nY_n)\big|}{r_n|Y_n|} \\
&= \frac{1}{|Y_n|}\big|F_{r_n}(Y_n) - v \cdot Y_n\big|.
\end{aligned}$$

Scegliendo

$$r_n = 2|X_n - X_0|,$$

abbiamo che $r_n \to 0$ e $|Y_n| = 1/2$. Di conseguenza, applicando (ii), otteniamo (1). $\square$